Introdução à Teoria de Grupos

Gabriel C. Magalhães*

2025

Resumo

Essas notas foram escritas como material de apoio para um minicurso ministrado na XXIX Semana da Física da Universidade Estadual de Londrina que ocorreu em outubro de 2025. Esse minicurso é uma introdução concisa e pedagógica para este tópico e cobre os assuntos de simetrias, rotações, álgebras de Lie e teoria de repesentações. Para um maior aprofundamento e compreensão desses tópicos, é recomendado o leitor consultar as referências.

Sumário

*gabriel.capelini@uel.br

1 Introdução

1.1 Simetrias

Um dos conceitos mais importantes da física é o de simetrias. Elas estão intimamente relacionadas com quantidades conservadas, via teorema de Noether[2]. Além disso, simetrias podem ser espontâneamente quebradas, o que nos permite entender transições de fase da origem a partículas sem massa conhecidas como *bósons de Goldstone*[3]. Simetrias também podem conter *anomalias*[4] que estão relacionadas com violações de leis de conservação e dão informações interessantes sobre o espectro da teoria.

Mas afinal, o que é uma simetria? Entendemos uma simetria como uma invariância sobre um certo conjunto de transformações.[1] Isto é, se após performarmos alguma transformação na nossa teoria e verificarmos que não houve mudança, dizemos que essa teoria é invariante sobre essa transformação. Abaixo, damos alguns exemplos intuitivos.

Veja o quadrado da figura abaixo.

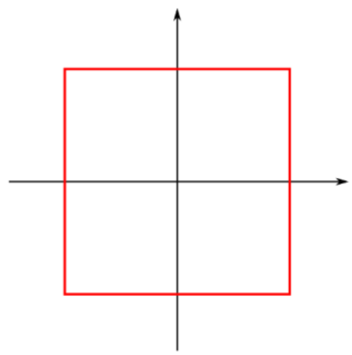

Figura 1.1: Apenas um quadrado. Fonte:[1]

Podemos fazer uma rotação desse quadrado em torno desse plano de, digamos, $5°$ no sentido horário. Nesse caso, o quadrado agora estaria da seguinte forma

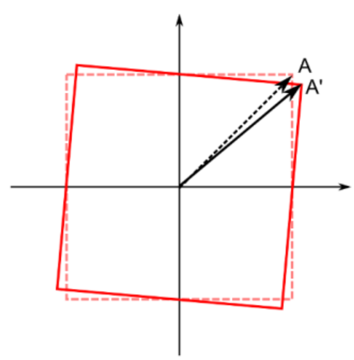

Figura 1.2: Quadrado rotacionado de $5°$. Fonte:[1]

Veja que a transformação que aplicamos foi uma rotação. Porém, é notável que verificamos uma diferença nesse quadrado após essa rotação. Mas agora, se rotacionarmos esse quadrado em $90°$,

[1] Para os mais avançados, transformações de calibre também se encaixam nessa definição porém não são consideradas simetrias mas sim redundâncias na teoria. Porém vamos deixar esses detalhes técnicos de lado.

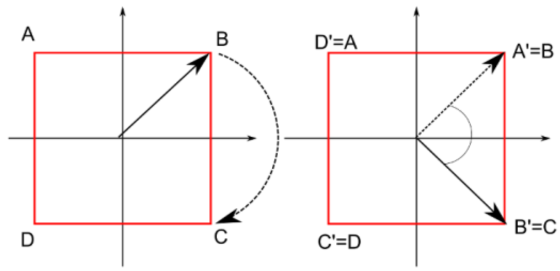

Figura 1.3: Quadrado rotacionado de 90°. Fonte:[1]

Verificamos que não é possível dizer se ele foi rotacionado ou não. Para entender melhor isso, suponha que você feche os olhos e então nós façamos essa rotação de 90°. Após você abrir os olhos novamente, você acreditaria que o quadrado está da mesma forma. Isso é o que chamamos de uma *simetria*.

Nesse caso, no entanto, essa simetria é caracterizada como uma simetria *discreta*, pois não é qualquer rotação que deixa o quadrado invariante, mas sim rotações múltiplas de 90°.

Outro exemplo que podemos usar é o do círculo.

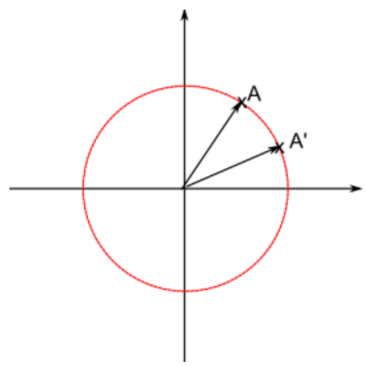

Figura 1.4: Apenas um círculo. Fonte: [1]

Nesse caso, é fácil perceber que qualquer rotação deixa o círculo invariante. Faça o mesmo experimento mental de fechar os olhos e então abri-los novamente. Independemente de qualquer rotação que façamos no círculo, você nunca será capaz de perceber se ele foi rotacionado ou não.

Nesse caso, dizemos que é uma simetria *contínua*, pois o círculo é simétrico para quaisquer ângulos de rotação.

Isso nos permite concluir algumas coisas.

- Se compormos duas rotações, isto é, rodarmos de 20° e depois rodarmos de 10°, isso equivale a uma rotação de 30°. Portanto, a composição de duas rotações também deve ser uma rotação.
- Podemos não fazer nenhuma rotação, o que equivale a um ângulo de rotação de 0°. Isso é o que chamamos de um elemento *identidade*. Portanto, uma identidade sempre é uma simetria e então deve ser levada em consideração quando estivermos falando dessa caoleção de transformações.
- Nós tomamos uma rotação no sentido horário. Mas podemos muito bem tomar rotações no sentido anti-horário. Isso implica que se fizermos uma rotação de 45° no sentido horário, podemos desafazê-la simplesmente rodando de 45° no sentido anti-horário. Isso é o que chamamos de um elemento *inverso*.
- Por último, rodar de 90° seguida de uma rotação de 40° seguida de uma rotação de 110° deve ser equivalente a uma rotação de 130° seguida de uma rotação de 110°, que deve ser equivalente a uma rotação de 90° seguida de uma rotação de 150°. Dizemos então que as rotações são *associativas*. Matematicamente esta ideia é representada por

$$R(110°)(R(40°)R(90°)) = R(110°)R(130°) = (R(110°)R(40°))R(90°) = R(150°)R(90°)$$

Dadas essas ideias intuitivas, veremos agora como as generalizamos matematicamente.

1.2 Definição de grupo

Um grupo é um conjunto G com um mapa $\cdot$ que é chamado de *regra de composição*, que satisfaz as seguintes propriedades:

- **Fechamento:** Para todo $g, g' \in G,\ g \cdot g' \in G$.
- **Identidade:** Existe um elemento $e \in G$ tal que para todo $g \in G,\ g \cdot e = e \cdot g = g$. Chamamos esse elemento de **identidade.**
- **Elemento inverso**: Para todo $g \in G$, existe $g' \in G$ tal que $g \cdot g' = g' \cdot g = e$. Chamamos esse elemento de **inverso** e o denotamos por $g' \equiv g^{-1}$.
- **Associatividade:** Para todo $g_1, g_2, g_3 \in G, (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$.

Abaixo, vamos dar alguns exemplos de conjuntos simples que formam grupos, e como a regra de composição de dois elementos não precisa ser necessariamente uma multiplicação.

Exemplo 1.1 (Números reais sobre multiplicação) *O conjunto de números reais $\mathbb{R}$ forma um grupo sobre a multiplicação.*

- ***Fechamento**: A multiplicação de dois números reais continua dando um número real.*
- ***Identidade**: O número 1 pode ser usado como uma identidade sobre a multiplicação.*
- ***Elemento inverso:** Para todo número real a a inversa desse número é simplesmente $1/a$, que também é um numero real, de forma que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.*
- ***Associatividade:** Segue facilmente da multiplicação de números reais.*

Exemplo 1.2 (Números inteiros sobre multiplicação) *O conjunto de números inteiros $\mathbb{Z}$ não forma um grupo sobre a multiplicação.*

Isso segue facilmente quando consideramos o elemento inverso. Para os números reais, bastava inverter o número e teríamos o seu inverso. Porém, no caso dos inteiros, dado um inteiro a, o número $1/a$ não é inteiro. Portanto, não existe um elemento inteiro que pode servir como inverso sobre a multiplicação.

Exemplo 1.3 (Números inteiros sobre a adição) *Tome o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ mas com a regra de composição sendo a adição $+$.*

- ***Fechamento:** A adição de dois números inteiros continuando sendo um número inteiro.*
- ***Identidade:** A identidade, por definição é um elemento que não realiza nenhuma mudança quando composta com qualquer outro elemento do grupo. No caso da adição, esse elemento é o inteiro 0, pois*

$$n + 0 = n, n \in \mathbb{Z}.$$

- ***Elemento inverso:** No caso do elemento inverso, podemos usar um número negativo, isto é,*

$$n + (-n) = 0, n \in \mathbb{Z}.$$

- ***Associatividade:** A associatividade segue trivialmente da soma dos números inteiros.*

Isso mostra que, de fato, a regra de composição nem sempre será uma multiplicação entre os elementos.

2 Rotações

Esta seção será dedicada a compreensão de um grupo extremamente importante na física: o grupo de rotações. Começaremos discutindo o caso mais simples que são rotações no plano, e depois discutiremos como realizá-las de outra maneira, usando números complexos. Após isso, vamos falar sobre rotações em 3 dimensões e como realizá-las utilizando um "análogo" aos números complexos, porém em 4 dimensões, chamados de *quaternions*.

2.1 Rotações em duas dimensões

A matriz de rotação em duas dimensões é representada[2] por,

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Essas transformações, como vimos nos exemplos iniciais, são transformações continuas, pois o ângulo de rotação θ pode variar continuamente no intervalo $\theta \in [0, 2\pi)$. Em oposição, temos outros tipos de transformações, que não podem ser caracterizadas como rotações (vamos entender isso um pouco mais a frente), que são as *reflexões*. Essas transformações são representadas matricialmente por

$$P_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

em que P_x é uma reflexão no eixo x e P_y é uma reflexão no eixo y. Diferentemente de uma rotação, essa transformação inverte apenas um dos eixos de uma forma que não é contínua. Dessa forma, reflexões são transformações discretas.

Vamos verificar que de fato rotações formam um grupo.

- **Fechamento:**

$$\begin{aligned} R(\theta)R(\theta') &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta' \\ \cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta' & \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

  Ou seja, a composição duas rotações é uma rotação com os ângulos somados.

- **Identidade**: Considerando $\theta = 0$, que equivale a não rodar, a matriz (2.1) se torna

$$R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

  que é justamente a matriz identidade.

- **Elemento inverso:** Da composição de matriz, temos que se tomarmos $\theta' = -\theta$, obtemos a matriz identidade. Ou seja, existe uma inversa e é exatamente $R(-\theta)$. Isso também pode ser verificado usando os métodos de álgebra linear para encontrar inversar de matrizes. Nesse caso usamos apenas nossa intuição física.

- **Associatividade:** Nesse caso, precisamos fazer a multiplicação de três matrizes $R(\theta)R(\theta')R(\theta'')$ e verificar que multiplicar $R(\theta)R(\theta')$ e depois $R(\theta'')$ ou multiplicar $R(\theta')R(\theta'')$ e depois multiplicar $R(\theta)$ não importa. **Porém**, em geral, a ordem da multiplicação de dois elementos de um grupo pode importar. Isto é, $R(\theta)R(\theta') \neq R(\theta')R(\theta)$. Quando a ordem não importa, dizemos que os elementos comutam e portanto este grupo é *abeliano*. No caso contrário, o grupo é *não abeliano*. Rotações no plano formam um grupo abeliano.

[2]Memorize esse termo pois vai ser importante mais tarde.

As rotações tem uma característica muito importante. Elas deixam o tamanho de vetores invariantes. Isto é, uma vez que rodamos um vetor, não consideramos que é o mesmo vetor de antes, pois o que caracteriza um vetor é seu módulo, direção e sentido. Nesse caso, sua direção e sentido mudaram, porém não o seu módulo. Vamos entender as implicações disso.

O módulo de um vetor é calculado fazendo o produto interno desse vetor com ele mesmo. Podemos denotar o vetor após uma rotação por $\mathbf{v}'$. Logo, temos que

$$\mathbf{v}' = R\mathbf{v}. \tag{2.3}$$

Como o módulo desse vetor não muda, temos que

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}. \tag{2.4}$$

Matricialmente, o produto interno de dois vetores é multiplicar um vetor linha por um vetor coluna, o que é equivalente a seu transposto. Logo, de outra forma

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v}' = \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v} \\
&(R\mathbf{v})^T (R\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T \mathbf{v} \\
&\mathbf{v}^T R^T R\mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{v},
\end{aligned}$$

ou seja, para o módulo um vetor permanecer invariante sobre rotações, isso implica na condição

$$R^T R = \mathbb{1}, \tag{2.5}$$

em que $\mathbb{1}$ é a matriz identidade. Dizemos que essa é a condição de ortogonalidade é então as rotações formam o *grupo ortogonal* $O(2)$, que é o grupo de todas matrizes 2×2 ortogonais. Porém, podemos verificar que as reflexões também são ortogonais. Se queremos exluir as reflexões e trabalhar com um grupo que envolve apenas as rotações, devemos trabalhar com um subgrupo de $O(2)$. Para isso, veja que, tomando o determinante de ambos lados da equação (2.5),

$$\begin{aligned}
&\det\left(R^T R\right) = \det(1) = 1 \\
&\det\left(R^T R\right) = \det\left(R^T\right)\det(R) = 1 \\
&\det(R)^2 = 1 \\
&\det(R) = \pm 1.
\end{aligned}$$

Ou seja, temos dois possíveis valores de determinantes para matrizes ortogonais, +1 e -1. A matrizes com determinante +1 são as rotações. Portanto, definimos o subgrupo de $O(2)$, $SO(2)$, em que S significa "special" para denotar que essas matrizes tem determinante +1. Logo, as rotações satisfazem as seguintes propriedades

- $R^T R = \mathbb{1}$,
- $\det(R) = 1$.

2.2 Rotações com números complexos

Existe uma outra maneira de realizar rotações em duas dimensões por um ângulo θ usando *números complexos* com módulo unitário. Veja que multiplicando. Um número complexo z tem módulo unitário se

$$|z| = z^* z = 1, \tag{2.6}$$

em que $*$ denota o complexo conjugado. Esses números complexos unitários formam um grupos que chamamos de $U(1)$. Daqui pra frente, não vamos mais provar quais objetos formam grupos, já vamos partir do fato que eles são.

Vamos chamar esses números complexos de U daqui pra frente. Podemos escrever um número complexo unitário como[3]

$$U = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \tag{2.7}$$

em que θ é um número real. Veja que de fato

$$(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) = 1. \tag{2.8}$$

Esse número complexo atua sobre outros números complexos, rodando eles. Por exemplo, para o número

$$z = 3 + 5i.$$

Vamos aplicar U para realizar uma rotação de $90°(\pi/2)$,

$$U(\theta = \pi/2)z = e^{i\pi/2}(3+5i) = (\underbrace{\cos(\pi/2)}_{=0} + i\underbrace{\sin(\pi/2)}_{=1})(3+5i) = 3i - 5. \tag{2.9}$$

Pictoricamente temos

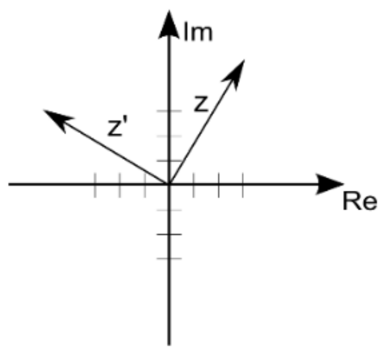

Figura 2.1: Rotação de um número complexo. Fonte: [1].

Porém, as rotações anteriormente atuavam sobre vetores, aqui elas atuam sobre números complexos. Para isso conectar essas duas ideias, podemos *representar*

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

de forma que satisfaçam

$$\mathbb{1}^2 = 1,\ i^2 = -1,\ 1 \cdot i = i \cdot 1 = i. \tag{2.11}$$

Agora veja que, de fato

$$U = \cos\theta\mathbb{1} + i\sin\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cos\theta + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\sin\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

fazendo a identificação (2.10) fomos capazes de *representar* as rotações no plano em termos de números complexos.

Com essa representação, podemos escrever um número complexo arbitrário como

$$z = a\mathbb{1} + ib = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Atuando uma rotação sobre o mesmo,

$$z' = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta - b\sin\theta & -b\cos\theta - a\sin\theta \\ a\sin\theta + b\cos\theta & -b\sin\theta + a\cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

[3]A derivação disso pode ser encontrada no Apêndice B.4.2 de [1].

Comparando ambos os lados,

$$\begin{aligned} a' &= a\cos\theta - b\sin\theta \\ b' &= a\sin\theta + b\cos\theta. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Veja que uma rotação sobre um vetor bidimensiona arbitrário

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

leva a

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta & -b\sin\theta \\ a\sin\theta & b\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Este é o mesmo resultado obtido em (2.15), portanto, encotnramos uma maneira fiel de representar as rotações no plano em termos de números complexos. Um termo um pouco mais sofisticado para isso é dizer que encontramos um *isomorfismo* entre o grupos $U(1)$ e o grupos $SO(2)$.

2.3 Rotações em três dimensões

As matrizes que realizam rotações em 3 dimensões são

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},\ R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Essas matrizes atuam sobre vetores tridimensionais e também formam um grupo que chamamos de $SO(3)$.

Agora, estamos interessados em fazer o mesmo processo que fizemos anteriormente. Para isso, precisamos introduzir uma generalização para os números complexos que vimos na seção anterior. A primeira ideia seria pensar num número complexo em três dimensões mas isso não é possível pois a álgebra não seria fechada (vamos entender isso mais a frente) e além disso, o número de graus de liberdade não bate. Para uma rotação no plano, o número de parâmetros necessários era apenas um ângulo. Um número complexo unitário tem o mesmo número de graus de liberdade. Para uma rotação em 3 dimensões, o número de graus de liberdade é 3. Portanto, precisamos de um número complexo unitário que tenha 3 graus de liberdade.

Para realizar isso, introduzimos então 3 unidades complexas $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ que satisfazem,[4]

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1. \tag{2.18}$$

Além disso, é preciso encontrar uma relação entre o produto cruzado dessas unidades complexas. Veja que escolhendo

$$\mathbf{ijk} = -1, \tag{2.19}$$

já da conta disso pois, multiplicando por $\mathbf{k}$ de ambos lados,

$$\mathbf{ij}\underbrace{\mathbf{kk}}_{=-1} = -\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{ij} = \mathbf{k}. \tag{2.20}$$

Nesse sentido que foi dito atrás que a álgebra para números complexos em 3 dimensões não seria fechada. Isto é, multiplicando dois números complexos, teriamos um terceiro elemento que não estaria definido na álgebra. Portanto, representamos um quaternion como,

$$q = a\mathbb{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}. \tag{2.21}$$

Analogamente ao que fizemos para o caso de $U(1)$, podemos representar as unidades complexas como

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{k} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

[4]É importante notar que essas unidades complexas não são vetores. A notação é apenas para facilitar a compreensão.

Logo, um quaternion arbitrário pode ser representado como

$$\begin{aligned} q &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} a+id & b+ic \\ -b+ic & a-id \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

A condição de unitariedade dos quaternions se traduz como

$$q^\dagger q = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1. \tag{2.24}$$

em que † significa tomar o transposto e depois o complexo conjugado da matriz. O transposto é a forma como multiplicamos a matriz (lembre-se que para multiplicar dois vetores, tínhamos que realizar o produto entre uma matriz linha e uma matriz coluna) e o conjugado precisa ser tomado para que isso retorne um número real.

Note que

$$det(q) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \tag{2.25}$$

o que implica de (2.24) que

$$\det(q) = 1. \tag{2.26}$$

Ou seja, os quaternions unitários, que agora representaremos por U, formam um grupo de matrizes 2×2 que chamamos de $SU(2)$ e tem as seguintes condições

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= 1 \\ \det(U) &= 1. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Assim como no grupo $SO(2)$, o S denota "special" que traduz na condição do determinante unitário, e U denota unitário, que é a primeira condição.

3 Álgebra de Lie

3.1 Geradores

3.1.1 Geradores do grupo SO(3)

3.1.2 Geradores do grupo SU(2)

4 Teoria de Representação

4.1 Representações do grupo SU(2)

Referências

[1] J. Schwichtenberg, *Physics from Symmetry.* Undergraduate Lecture Notes in Physics, Springer, 2nd ed. 2018 ed.

[2] N. Lemos, *Mecânica Analítica.* Editora Livraria da Física, 2007.

[3] A. Beekman, L. Rademaker, and J. van Wezel, "An introduction to spontaneous symmetry breaking," *SciPost Physics Lecture Notes*, Dec. 2019.

[4] R. Arouca, A. Cappelli, and H. Hansson, "Quantum field theory anomalies in condensed matter physics," *SciPost Physics Lecture Notes*, Sept. 2022.

[5] Harald J W Muller-kirste and Armin Wiedemann, *Introduction To Supersymmetry (2nd Edition)*. OCLC: 1480166148.